Bases e conversão entre elas

Notação posicional: a posição dos algarismos ou dígitos determina o valor
Algarismos componentes de um número assumem valores diferentes dependendo da posição relativa no número. O valor total é a soma dos valores relativos.
Base: quantidade de algarismos disponíveis em um dado sistema de numeração.

- base 10
- base 2
- base 8
- base 16

Número 2313 na base 10.
Cada algarismo possui um valor correspondente dependendo da posição:
$3 = 3 \times 10^{0}$
$10 = 1 \times 10^{1}$
$300 = 3 \times 10^{2}$
$2000 = 2 \times 10^{3}$
$2000 + 300 + 10 + 3= 2313$
$N=(d_{n-1}d_{n-2}d_{n-3}...d_1d_0)$
d=algarismo do número
n-1, n-2, n-3, ..., 1, 0= posição de cada algarismo
b=base
n=número de dígitos
$N=d_{n-1}x\ b^{n-1}+d_{n-2}x\ b^{n-2}+...d_1x\ b^1+d_0x\ b^0$
N=5642
$n=4\ d_{n-1}=d_3=5;\ d_2=6;\ d_1=4;\ d_0=2;$
$N=5 \times 10^{3}+6x\ 10^2 + 4 \times 10^{1} + 2 \times 10^{0}= 5000 + 600 + 40 + 2= 5642_{10}$

Números fracionários:

$N=d_{n-1}x\ b^{n-1}+d_{n-2}x\ b^{n-2}+...d_1x\ b^1+d_0x\ b^0 +d_{-1}x\ b^{-1}+d_{-2}x\ b^{-2}+...d_{-m}x\ b^{-m}$
Exemplo: $59{,}21 = 5 \times 10^{1}+ 9 \times 10^{0} + 2 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2} = 50 + 9 +0{,}2 + 0{,}01= 59{,}21$
Exemplo: $33{,}5 = 3 \times 10^{1}+ 3 \times 10^{0} + 5 \times 10^{-1} = 30 + 3 +0{,}5 = 33{,}5$

Base 2 e potência de 2

Quanto menor a base, mais dígitos são necessários e pior a visualização, por isso utilizam-se potências de 2. Base 8 (octal) ou 16 (hexadecimal).
$(10111)_2=1x2^4+0x2^3+1x2^2+1x2^1+1x2^0=23$
$(312)_5=3x5^2+1x5^1+2x5^0=82$
$(130)_8=1x8^2+3x8^2+0x8^0=88$
Número máximo de algarismos diferentes em 1 base é igual ao valor da base:

- base 10: 10 dígitos - 0 a 9
- base 2: 2 dígitos - 0 a 1

- base 16 16 dígitos- 0 a 9, A, B, C, D, E, F

Base hexadecimal: $(12BC)_{16}$=

$1x16^3+2x16^2+11x16^1+12x16^0=1x4096+2x256+11x16+12=4096+512+176+12=4796_{10}$

Base 10	Base 2	Base 8	Base 16
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11

Cada dígito octal corresponde a combinação de 3 dígitos binários

$8=2^3$

$N=d_8x\ 2^8+d_7x\ 2^7+...+d_2x\ 2^3+d_1x\ 2^1+d_0x\ 2^0$

Para converter da base 2 para 8, divide-se o número em grupos de 3 bits da direita para a esquerda e acha-se o dígito octal equivalente:

Exemplo: $(111\ 010\ 111)_2=(727)_8$

Exemplo: $(1\ 010\ 011\ 101)_2=(1235)_8$

Para converter da base 8 para 2, substitui-se cada dígito na base 8 pelo grupo de 3 bits equivalente na base 2:

Exemplo: $(357)_8=(011\ 101\ 111)_2=(11101111)_2$

Exemplo: $(765)_8=(111\ 110\ 101)_2$

Conversão entre as bases 2 e 16

Cada dígito hexadecimal corresponde a combinação de 4 dígitos binários

$16=2^4$

$N=d_8x\ 2^8+d_7x\ 2^7+...+d_2x\ 2^3+d_1x\ 2^1+d_0x\ 2^0$

Para converter da base 2 para 16 agrupam-se os dígitos em grupos de 4 e encontra-se dígito correspondente na base 16.

Exemplo: $(10\ 1101\ 1011)_2=(2DB)_{16}$

Exemplo: $(10\ 0111\ 0011\ 1101)_2=(273D)_{16}$

Para converter da base 16 para base 2, encontra-se o grupo de 4 dígitos na base 2 correspondente ao dígito na base 16.

Exemplo: $(316)_{16}=(0011\ 0001\ 0110)_2$
Exemplo: $(B10)_{16}=(1011\ 0001\ 0000)_2$
Para converter da base 8 para 16, converte para base 2 e depois para 16.
Exemplo: $(3174)_8=(011\ 001\ 111\ 100)_2=(67C)_{16}$
Exemplo: $(2E7A)_{16}=(0010\ 1110\ 0111\ 1010)_2=(27172)_8$

Conversão de base B para base 10.

$N=(d_{n-1}d_{n-2}d_{n-3}...d_1d_0)$
$N=d_{n-1}x\ b^{n-1}+d_{n-2}x\ b^{n-2}+...d_1x\ b^1+d_0x\ b^0$
Exemplo: 1110010_2
$2^6+2^5+2^4+2^1=64+32+16+2=114$
Exemplo: 32_8
$3x\ 8^1+2\ x\ 8^0=26$
Exemplo: $2A2_{16}$
$2x16^2+10\ x\ 16^1+2x16^0=512+160+2=674$

Conversão de números decimais para base B

Conversão de números inteiros
$N=\{[(d_{n-1}\ x\ b + d_{n-2})\ x\ b + d_{n-3}]\ x\ b + ... + d_1\}\ x\ b + d_0$
$N=N_0=N_1xb+d_0$
$N_1=N_2xb+d_1$
$N_2=N_3xb+d_2$
$N_{n-1}=d_{n-1}$
$N=N_0=72351=N_1xb+d_0=7235x10+1$ -> $d_0=1$
$N_1=7235=N_2xb+d_1=723\ x\ 10\ +5$ -> $d_1=5$
$N_2=723=N_3xb+d_2=72x10+3$ -> $d_2=3$
$N_3=72=N_4xb+d_3=7x10+2$ -> $d_3=2$
$N_4=7$ -> $d_4=7$
Como por definição d_i é maior que 0 e menor que a base B, ele pode ser obtido dividindo-se de forma inteira N_i pela base B e o resto da divisão será o algarismo desejado.
Algoritmo básico:

1. i=0
2. $N_i=N$
3. enquanto N_i diferente de 0
    - d_i=resto da divisão de N_i por B
    - N_{i+1}=quociente de N_i por B
    - i=i+1

Exemplo: Converter os números abaixo na base 10 para base 2
5/2=2, sobra 1, logo $d_0=1$
2/2=1, sobra 0, logo $d_1=0$
1/2=0, sobra 1, logo $d_2=1$

$5_2=101_2$

183/2=91, sobra 1, logo $d_0=1$

91/2=45, sobra 1, logo $d_1=1$

45/2=22, sobra 1, logo $d_2=1$

22/2=11, sobra 0, logo $d_3=0$

11/2=5, sobra 1, logo $d_4=1$

5/2=2, sobra 1, logo $d_5=1$

2/2=1, sobra 0, logo $d_6=0$

1/2=0, sobra 1, logo $d_7=1$

$183_{10}=10110111_2$

2321/2=1160, sobra 1, logo $d_0=1$

1160/2=580, sobra 0, logo $d_1=0$

580/2=290, sobra 0, logo $d_2=0$

290/2=145, sobra 0, logo $d_3=0$

145/2=72, sobra 1, logo $d_4=1$

72/2=36, sobra 0, logo $d_5=0$

36/2=18, sobra 0, logo $d_6=0$

18/2=9, sobra 0, logo $d_7=0$

9/2=4, sobra 1, logo $d_8=1$

4/2=2, sobra 0, logo $d_9=0$

2/2=1, sobra 0, logo $d_{10}=0$

1/2=0, sobra 1, logo $d_{11}=1$

$2321_{10}=100100010001_2$

Conversão de números fracionários

$N=d_{-1}x\ b^{-1}+d_{-2}x\ b^{-2}+...d_{-m}x\ b^{-m}$

Algoritmo:

1. i = -1
2. $N' = N$ x b
3. d_i = parte inteira de N'
4. enquanto parte fracionária de N' # 0 e número de bits <= m
   - N' = parte fracionária de N' x b
   - i = i-1;
   - d_i = parte inteira de N'

Exemplo:

0,7265625 x 2 = 1,453125 -> $d_{-1}=1$

0,453125 x 2 = 0,90625 -> $d_{-2}=0$

0,90625 x 2 = 1,8125 -> $d_{-3}=1$

0,8125 x 2 = 1,625 -> $d_{-4}=1$

0,625 x 2 = 1,25 -> $d_{-5}=1$

0,25 x 2 = 0,5 -> $d_{-6}=0$

0,5 x 2 = 1,0 -> $d_{-7}=1$

$0,7265625=(0,1011101)_2$

Exemplo:

$0,46 \times 2 = 0,92 \rightarrow d_{-1}=0$

$0,92 \times 2 = 1,84 \rightarrow d_{-2}=1$

$0,84 \times 2 = 1,68 \rightarrow d_{-3}=1$

$0,68 \times 2 = 1,36 \rightarrow d_{-4}=1$

$0,36 \times 2 = 0,72 \rightarrow d_{-5}=0$

$0,72 \times 2 = 1,44 \rightarrow d_{-6}=1$

$0,44 \times 2 = 0,88 \rightarrow d_{-7}=0$

$0,46 = 0,0111010_2$